Jurnal Kajian Pendidikan Indonesia (JKPI)
Vol. 1, No. 1, Maret 2024, hal. 9~16
ISSN: 3047-5805, DOI: 10.62947/jkpi.v1i1.7

Berpikir matematis dalam mengonstruksi konsep matematika: sebuah analisis secara teoritis dan praktis

Subanji
Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang, Malang, Indonesia

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diserahkan 01 02, 2024
Direvisi 02 13, 2024
Diterima 03 10, 2024

Kata Kunci:

APOS
Berpikir matematis
Proses berpikir

ABSTRAK

Kajian proses berpikir dalam mengonstruksi konsep matematika sangat penting, karena matematika memiliki objek kajian yang abstrak. Pengonstruksian konsep matematika dapat dikaji berdasarkan teori berpikir atau teori konstruksi. Tulisan ini mengkaji pengonstruksian konsep matematis berdasarkan teori pemrosesan informasi, struktur mental APOS dan mekanisme konstruksi konsep. Berpikir matematis dalam mengonstruksi konsep matematika berdasarkan teori pemrosesan informasi prosesnya mencakup: sensory memory, short-term memory, dan long-term memory. Konstruksi konsep matematika ditinjau dari struktur mental bisa berbentuk: action, processes, object. schema dan jika ditinjau dari mekanisme pembentukan pengetahuan matematis berupa proses: interiorization, coordination, reversal, encapsulation, dan de-encapsulation.

ABSTRACT

The study of the thought process in constructing mathematical concepts is very important, because mathematics has an abstract object of study. The construction of mathematical concepts can be studied based on theory of thinking or construction theory. This paper examines the construction of mathematical concepts based on information processing theory, APOS mental structure and concept construction mechanisms. Mathematical thinking in constructing mathematical concepts based on information processing theory, the process includes sensory memory, short-term memory, and long-term memory. The construction of mathematical concepts in terms of mental structure can take the form of action, processes, object. schema and if viewed from the mechanism for forming mathematical knowledge in the form of processes: interiorization, coordination, reversal, encapsulation, and de-encapsulation.

Penulis Korespondensi:

Subanji
Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang
Jalan Semarang No. 5, Malang, Indonesia
Email: subanji.fmipa@um.ac.id

1. PENDAHULUAN

Berpikir merupakan aktifitas yang sangat penting dalam kehidupan manusia. Entitas dari manusia adalah berpikir. Ketiadaan berpikir berarti pula ketiadaan manusia. Pentingnya berpikir bagi manusia dapat digunakan untuk membedakan antara manusia dan makhluk lain. Manusia sebagai makhluk berpikir yang dikarunia oleh Tuhan tiga unsur penting, yakni cipta, rasa, dan karsa. Subanji dkk (2014) menjelaskan bahwa unsur cipta (budi) berkenaan dengan akal (rasio) yang terkait dengan muncul dan berkembangnya ilmu (science) dan teknologi. Unsur rasa (estetika) akan menimbulkan nilai seni (art). Dengan rasa itu manusia menilai mana yang indah dan mana yang tidak indah. Ini terkait dengan “nilai keindahan”. Unsur karsa akan menimbulkan etika atau moral. Dengan karsa itu manusia menilai mana yang baik dan mana yang tidak baik. Ini terkait dengan “nilai kebaikan” atau “nilai moral”. Akal manusia yang teraktualisasi dalam bentuk berpikir memiliki peran sangat penting untuk menilai mana yang benar dan mana yang salah berdasarkan kenyataan yang diterima oleh akal. Salah satu aspek berpikir yang khusus adalah berpikir matematis.

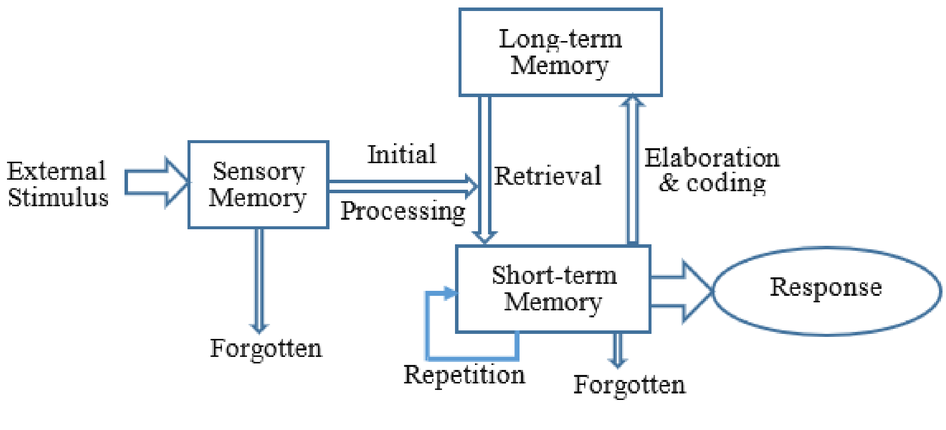
Berpikir matematis berbeda dengan berpikir empiris, meskipun sebagian berpikir matematis berkembang dari berpikir empiris. Berpikir empiris terikat oleh fenomena empiris yang selanjutnya berkembang dan menjadi dasar ilmu sain. Berpikir matematis berkembang lebih leluasa, tidak terikat oleh fenomena. Yang lebih penting dalam berpikir matematis adalah struktur berpikir/bernalar yang masuk akal, meskipun “mungkin” tidak ada objek empirisnya atau tidak mampu digambarkan secara empirik. Berpikir matematis menjangkau yang tak terjangkau oleh berpikir empiris. Sebagai contoh adanya berpikir deduktif dalam matematika yang tidak bisa dilihat secara empirik dan hanya bisa diukur dengan “penalaran logis”. Hal ini terjadi karena berpikir matematis merupakan berpikir yang didasari oleh karakteristik matematika.

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang memiliki karakteristik: objek kajian yang abstrak, bertumpu pada kesepakatan, berpola pikir deduktif, memiliki simbol yang kosong dari arti, memperhatikan semesta pembicaraan, dan konsisten dalam sistemnya (Soedjadi, 2000). Objek kajian yang abstrak disebut juga objek mental yang ada dalam pikiran yang memiliki objek dasar: (1) fakta, (2) konsep, (3) operasi, (3) prinsip. Dari objek dasar disusun suatu pola dan struktur matematika. “Kekuatan” matematika terletak pada keleluasaan dalam menyusun pola dan struktur matematika. Berpikir merupakan modal utama dalam menyusun pola dan struktur matematika. Karena itu matematika sebagai ilmu yang memiliki ciri khas pengembangan berpikir dengan objek mental sebagai kajiannya. Bahkan matematika juga sering diidentikkan dengan ilmu berpikir, sehingga ada interpretasi umum bahwa siswa yang mampu dalam “matematika” dipandang sebagai siswa yang pandai (cerdas) dan memiliki kemampuan berpikir tingkat tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa berpikir matematis sangat penting untuk dikaji dalam kontek belajar matematika.

Pentingnya berpikir matematis menjadi bahan kajian menarik dalam penelitian pendidikan matematika (Blanton, dkk., 2015; Leatham, dkk., 2015; Mason dkk, 2010; Tall, 2009). Blanton dkk (2015) menjelaskan bahwa pengembangan berpikir aljabar bisa dilakukan dengan intervensi. Leatham, dkk. (2015) menekankan pentingnya pemahaman konsep matematis untuk membangun berpikir siswa. Mason dkk. (2010) mengaji proses berpikir matematis dalam pemecahan masalah matematika. Tall (2009) menemukan bahwa berpikir matematis dapat dikembangkan melalui pemecahan masalah dan pembuktian. Pengembangan berpikir matematis merupakan salah satu hal utama dalam belajar matematika. Matematika sebagai materi yang memiliki ciri khas pengembangan berpikir, meskipun sebagian proses konstruksi dibangun dari konteks kehidupan.

2. PROSES BERPIKIR BERDASAR KONSTRUKSI PENGETAHUAN MATEMATIS

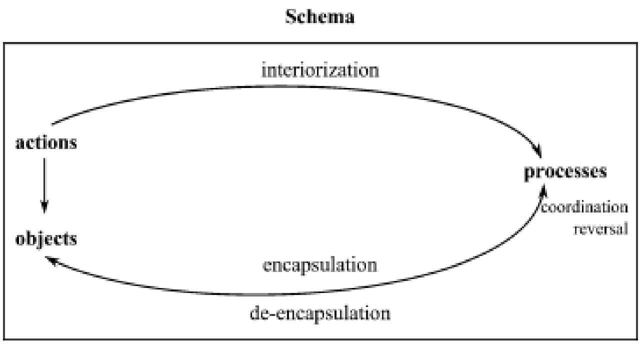
Konstruksi pengetahuan matematis bisa dibahas menggunakan bermacam-macam teori konstruksi, namun dalam tulisan ini hanya dibahas dua kerangka teoritis tentang konstruksi pengetahuan matematis, yakni teori pemrosesan informasi, teori APOS (aksi-proses-objek, skema) termasuk abstraksi reflektif. Teori pemrosesan informasi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1: Teori Pemrosesan Informasi

Teori pemrosesan informasi menjelaskan konstruksi pengetahuan, mulai dari masuknya informasi, penyaringan, pengolahan, penyimpanan, sampai pemanggilan kembali informasi di penyimpanan pengetahuan. Informasi yang banyak (berupa stimulus dari luar) setiap saat masuk dan diseleksi melalui sensory memory. Informasi yang tidak penting diabaikan (dilupakan), sedangkan informasi penting dilanjutkan ke short-term memory sekaligus diproses dengan memanfaatkan (memanggil) informasi yang ada di long-term memory. Terdapat 4 (empat) hasil pemrosesan informasi, kelanjutan dari short-term memory, yakni: (1) hasil pemrosesan yang tidak penting dilupakan, (2) hasil pemrosesan yang sangat penting dan belum tuntas dalam pemrosesan akan diulang, (3) hasil pemrosesan yang perlu tindakan akan muncul respon, dan (4) hasil pemrosesan informasi yang sudah selesai dikoding dan disimpan di long-term memory.

Pembentukan pengetahuan juga bisa dikaji menggunakan struktur mental (APOS) dan mekanisme konstruksi pengetahuan yang disebut abstraksi reflektif. Struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan menggambarkan pembentukan pengetahuan dalam proses belajar. Arnon dkk (2014) menggambarkan struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan matematis seperti berikut.



Gambar 2: Struktur Mental dan Mekanisme konstruksi pengetahuan matematis

Ketika seseorang menghadapi masalah matematika, dia akan meresponnya. Ini berarti ada struktur mental actions dan mekanisme konstruksi pengetahuan yang terjadi adalah interiorization, di mana dia akan menginteriorisasi komponen-komponen yang ada di masalah ke dalam struktur mentalnya. Komponen-komponen yang sudah diinteriorisasi diproses dalam struktur mental yang disebut processes. Mekanisme konstruksi pengetahuan matematika yang terjadi dalam pemrosesan ini adalah coordination dan reversal. Komponen-komponen diproses dengan dikoordinasikan antar komponen, termasuk urutan-urutannya diatur. Pengoordinasian komponen-komponen ini berlangsung secara terus menerus sampai membentuk pengetahuan yang bermakna, dengan kata lain terjadi mekanisme konstruksi pengetahuan matematis yang disebut encapsulation atau de-encapsulation. Komponen-komponen yang sudah diproses dan dikemas (dienkapsulasi) menjadi objects di struktur mental. Setelah menjadi object, pengetahuan tersebut dikaitkan dengan struktur pengetahuan yang sudah dimiliki, maka terbentuklah struktur mental yang disebut schema. Selanjutnya masalah yang penting adalah bagaimana konstruksi konsep terjadi jika dilihat dari proses berpikir. Dalam hal ini berpikir matematis dalam konteks nampaknya sangat penting dalam pembentukan konsep matematika.

3. BERPIKIR MATEMATIS DALAM KONTEKS: ANALISIS KONSTRUKSI KONSEP

Pembahasan "berpikir matematis dalam konteks" diawali dari beberapa kasus konstruksi berpikir yang memuat komponen logika berdasarkan konteks. Kasus yang dijadikan contoh mulai dari anak kecil sampai orang dewasa. Semua kasus yang disajikan diperoleh dari pengalaman penulis dalam berinteraksi dengan anak kecil dan berinteraksi dengan siswa atau mahasiswa. Kasus pertama, seorang Bapak sedang naik mobil dan berbincang dengan anaknya (5 tahun). Mobilnya sedang melintas di jalan Semeru, di saat itu terjadi dialog antara Anak (A) dan Bapaknya (B) sebagai berikut.

A: ayah ini jalan apa?
B: jalan semeru
A: salah ayah, ini bukan jalan semeru
B: Lho kok bisa, dari mana tahu bukan jalan semeru?
A: Ini jalan mobil, kalau di sana ada jalan kereta
B: oh...begitu

Dari dialog tersebut nampak bahwa konteks sangat menentukan jawaban dari masalah. Meskipun masalah tersebut sangat sederhana, namun bisa dianalisis berdasarkan teori pemrosesan informasi dan APOS (termasuk abstraksi reflektif).

Pertama, berdasar teori pemrosesan informasi, anak (A) tersebut merespon keadaan jalan semeru, di mana banyak mobil yang lewat dan menganggap situasi tersebut penting untuk didiskusikan, sehingga informasi diteruskan ke short-term memory dan merespon dengan mempertanyakan “ayah ini jalan apa?”. Dia juga browsing di long-term memory yang terkait dengan situasi tersebut dan ditemukan jenis transportasi, yakni ada mobil dan ada kereta dan disimpulkan jalan ini adalah jalan mobil. Di sisi lain, ayahnya sebagai orang dewasa yang sudah memiliki skema di long-term memory tentang nama jalan dan menganggap konteks yang sesuai dengan pertanyaan adalah jalan semeru. Kedua jawaban (Bapak dan Anak) tidak ada yang salah, tergantung konteksnya. Apabila konteks yang digunakan adalah fungsi jalan maka jawabannya jalan mobil, tetapi jika konteksnya nama jalan, maka jawabnya adalah Jalan Semeru. Hal ini menunjukkan bahwa konteks sangat penting dalam proses mengonstruksi konsep. Pentingnya konteks juga terjadi dalam mengonstruksi konsep matematika. Sebagai contoh, ketika siswa diminta untuk menyelesaikan masalah “tentukan himpunan selesaian dari 2x + 3 = 6!”, siswa langsung bisa mengubah menjadi 2x = 3 dan selesaiannya {3/2}. Jawaban siswa tersebut benar kalau konteks (semesta) nya bilangan rasional (atau bilangan real), tetapi jika konteks (semesta) nya bilangan bulat, persamaan tersebut selesaiannya himpunan kosong.

Kedua, analisis berdasarkan teori APOS, anak (A) merespon masalah “jalan” sebagai bentuk struktur mental action dan mekanisme konstruksi dilakukan dengan interiorization, di mana Anak menginteriorisasi komponen-komponen, yakni ada mobil, jalan, hubungan antara mobil dan manfaat jalan. Berdasarkan komponen-komponen tersebut, diproses dalam struktur mental processes. Dalam pemrosesan ini juga melibatkan pengetahuan yang sudah dimiliki dan diungkap, bahwa ada jenis kendaraan “kereta api” yang juga memiliki jalan tersendiri (berbentuk rel). Mekanisme konstruksi yang dilakukan anak adalah coordination, yakni mengoordinasikan “ada kereta api, maka ada jalannya yang disebut rel”, jika ada mobil maka ada jalannya sendiri, yakni yang sedang dia hadapi. Dari proses koordinasi tersebut, dienkapsulasi bahwa jalan yang ditanyakan tersebut merupakan jalan mobil (bukan jalan semeru). Hal ini menunjukkan terbentuknya struktur mental object, bahwa ada pasangan kereta dengan rel dan mobil dengan “jalan”. Dari struktur mental yang berbentuk object tersebut diikatkan ke tema pengetahuan yang sudah dimiliki, yakni masing-masing kendaraan memiliki jalan masing-masing. Hal ini menunjukkan sudah terbentuknya struktur mental schema.

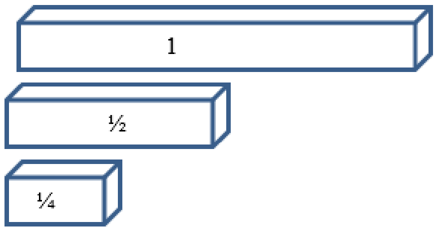
Kasus kedua terkait dengan konstruksi konsep bilangan pecahan (rasional). Penelusuran terhadap proses konstruksi konsep bilangan rasional dilakukan dalam dua bentuk: (1) secara individu melalui wawancara mendalam dan (2) secara klasikal melalui diskusi-investigatif di dalam proses perkuliahan. Wawancara mendalam dilakukan kepada dua orang mahasiswa pendidikan dasar pada saat ujian komprehensif lisan. Diskusi-investigatif dilakukan di dua kelas berbeda Pendidikan Dasar yang sedang menempuh matakuliah Praktik Lapangan (KPL) dan matakuliah pengembangan bahan ajar. Pertanyaan yang diberikan adalah sebagai berikut.

Dari dua pernyataan berikut, mana yang benar? Beri alasannya! 1. Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional 2. Himpunan bilangan rasional bagian dari himpunan bilangan bulat

Dari masalah tersebut, mahasiswa (secara individu maupun klasikal) menjawab bahwa “himpunan bilangan rasional bagian dari himpunan bilangan bulat”. Jawaban tersebut “sangat” mengagetkan peneliti, sehingga dilakukan penelusuran lebih mendalam. Paparan ini meringkas proses penelusuran dari hasil wawancara dan diskusi investigatif, antara peneliti (P) dan Subjek (S).

P: Menurut Anda, dari dua pernyataan itu mana yang benar?
S: bilangan rasional itu kan bilangan pecahan sehingga merupakan bagian dari bilangan bulat
P: Bisakah memberikan contoh beberapa bilangan rasional (atau kamu sebut pecahan) dan beberapa bilangan bulat?
S: contoh bilangan pecahan adalah ½, 1/3, 2/3, ¾, dan masih banyak yang lain. Contoh bilangan bulat adalah 1, -1, 2, -2, 3, -3, dan masih banyak yang lain
P: kenapa Anda mengatakan bilangan pecahan bagian dari bilangan bulat?
S: karena kalau kita punya 1 satuan (sambil memegang pensil), maka ½ merupakan bagian dari satu ini, yakni separoh dari pensil ini

Berdasarkan ringkasan wawancara mendalam dan diskusi investigatif tersebut, nampak bahwa ada kesalahan dalam konstruksi himpunan bagian. Subjek mengonstruksi bilangan pecahan dari bilangan bulat. Misalkan ada satu balok yang merepresentasikan bilangan 1 (satuan), maka bilangan ½ bisa direpresentasikan sebagai balok yang panjangnya ½ dari satuan, seperti nampak pada Gambar 3.



Gambar 3. Konstruksi bilangan pecahan Subjek S

Berdasarkan fakta ini dikonstruksi konsep ½ bagian dari 1. Begitupula ¼ direpresentasikan sebagai ¼ bagian dari 1. Karena ½ dan ¼ adalah bilangan pecahan dan merupakan bagian dari 1 (sebagai bilangan bulat), maka akhirnya Subjek menyimpulkan bahwa pecahan bagian dari bilangan bulat. Konstruksi ini nampak masuk akal, meskipun sebenarnya salah. Peneliti mencoba menelusuri lebih lanjut dengan pecahan yang lebih besar dan melakukan dialog investigatif seperti berikut.

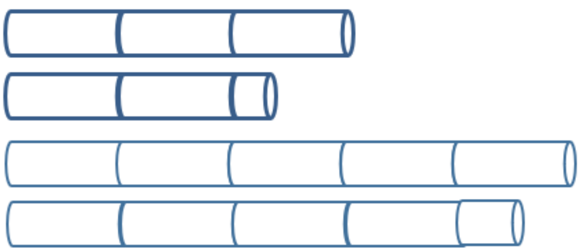
P: Bagaimana kalau $2\frac{1}{3}$ *dan* $4\frac{1}{2}$*?*

S: sama, $2\frac{1}{3}$ *terletak diantara 2 dan 3. Kalau kita punya 3 pensil begini (*sambil memegang pensil*), maka* $2\frac{1}{3}$ *juga bagian dari 3 pensil. Kalau* $4\frac{1}{2}$ *bagian dari 5 pencil ini (*sambil memegang pensil*).*

P: oh begitu. Apakah fakta tersebut Anda gunakan untuk menyimpulkan bahwa bilangan pecahan bagian dari bilangan bulat?

S: Iya.

Dialog tersebut menunjukkan subjek yakin bahwa bilangan pecahan $2\frac{1}{3}$ merupakan bagian dari bilangan bulat 3, karena bilangan pecahan dikonstruksi dari objek pecahan bagian dari objek utuh (sebagai bilangan bulat). Makna "bagian" **bukan** sebagai himpunan bagian, tetapi sebagai "bagian dari keseluruhan", di mana "keseluruhannya" sebagai sesuatu yang utuh (diinterpretasikan sebagai bilangan bulat). Begitupula bilangan pecahan $4\frac{1}{2}$ merupakan bagian dari bilangan bulat 5, karena subjek menginterpretasi $4\frac{1}{2}$ pensil bagian dari 5 pensil, seperti diilustrasikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Kesalahan konstruksi bilangan pecahan Subjek S

Dalam hal ini, ada kesalahan subjek dalam mengonstruksi konsep matematika, di mana terjadi interferensi berpikir konsep himpunan tercampur dengan konstruksi pecahan (bagian terhadap keseluruhan). Kesalahan konstruksi konsep perlu mendapat perhatian dari aspek berpikir subjek, karena belajar matematika adalah mengonstruksi konsep matematika (Kobiela, M. & Lehrer, R., 2015; Subanji & Nusantara, T., 2016) dan pengembangan berpikir siswa (Leatham, K.R., Peterson, B.E., Stockero, S.L., Zoest, L.,R.V., 2015; Subanji & Supratman, 2015). Berkaitan dengan hal tersebut, peneliti menelusuri lebih lanjut proses berpikir subjek dalam mengonstruksi bilangan pecahan dikaitkan dengan bilangan bulat melalui wawancara investigatif sebagai berikut.

P: kalau saya memiliki 2 pensil, apakah 2 pensil bagian dari $2\frac{1}{3}$*?*

S: Iya

P: Apakah 2 bilangan bulat? apakah $2\frac{1}{3}$ *bilangan pecahan?*

S: Iya

P: Apakah bisa disimpulkan bilangan bulat bagian dari rasional?

*S: Oh iya (*berpikir lama*), bagaimana ya? tapi biasanya pecahan itu di antara bilangan bulat*

P: Ok. Kembali ke contohmu tadi. Kalau kita memiliki pensil $4\frac{1}{2}$ *apakah 1 pensil, 2 pensil, dan 3 pensil merupakan bagian dari* $4\frac{1}{2}$ *pensil?*

*S: Iya. Tapi.... (*berpikir lama*). Iya masuk akal. Berarti cara mikir saya salah selama ini.*

Dari wawancara investigatif tersebut, nampak bahwa subjek mengalami "benturan berpikir" (sering disebut *cognitive conflict*). Subjek merasakan ada masalah dalam proses konstruksi yang menghasilkan simpulan "bilangan rasional sebagai bagian dari bilangan bulat", bahwa konstruksi tersebut bertentangan dengan fakta lain yang menyimpulkan bilangan bulat bagian dari pecahan. Adanya *cognitive conflict* sebagai awal yang baik untuk memperbaiki kesalahan matematis subjek. Hal ini sesuai pendapat Tall (1977) yang menekankan pentingnya cognitive conflict dalam pembelajaran matematika., pendapat (Kieslich, P.J. & Hilbig, B.E., 2014; Kang, H., Scharmann, L.C., Kang, S., Noh, T., 2010; Toka, Y., & Aşkar, P., 2002; Limo'n, Margarita, 2001) yang menekankan bahwa cognitive conflict dapat digunakan untuk mengubah dan mengembangkan konseptual matematis serta pendapat dari Rolka dkk. (2007) yang menyatakan bahwa *cognitive conflict* dapat mengubah keyakinan dalam belajar matematika.

Pendekatan konstruksi bilangan pecahan dari "bagian terhadap keseluruhan" menghambat subjek untuk mengonstruksi himpunan bagian. Subanji (2016) menjelaskan fenomena ini sebagai proses interferensi berpikir. Subjek sebenarnya sudah belajar tentang konsep bilangan pecahan secara formal, namun pada saat mengonstruksi himpunan bagian yang digunakan bukan konsep formal tersebut. Hal ini terungkap dari proses wawancara berikut.

P: Pernahkan Anda belajar konsep bilangan pecahan?
S: Pernah
P: Apa bilangan pecahan itu?
S: Bilangan yang bisa ditulis sebagai $\frac{a}{b}$, *dengan a, b bilangan bulat dan b≠0.*
P: Apakah 2 bilangan pecahan?
S: Bukan, 2 bilangan bulat
P: Kalau $\frac{6}{3}$ *apakah bilangan pecahan?*
*S: Ehm.. (*berpikir agak lama*). Kalau mengikuti pengertian bilangan pecahan, a=6 dan b=3. Iya* $\frac{6}{3}$ *merupakan bilangan pecahan*
P: bagaimana dengan 2, apakah bilangan pecahan?
S: Mestinya Iya, karena $2 = \frac{6}{3}$
P: Apakah setiap bilangan bulat bisa dinyatakan sebagai bilangan pecahan?
S: kalau berdasarkan contoh tadi, Iya
P: Sekarang, apa yang dapat kamu simpulkan? Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan pecahan atau sebaliknya "himpunan blangan pecahan bagian dari himpunan bilangan bulat?
S: Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan pecahan

Berdasarkan dialog tersebut nampak bahwa subjek sudah memiliki pengetahuan tentang konsep bilangan pecahan secara formal dan memiliki pengetahuan tentang himpunan bagian. Dominasi oleh proses konstruksi "pecahan sebagai bagian dari yang utuh" mengakibatkan konsep himpunan terinterferensi oleh konstruksi tersebut dan mengakibatkan kesalahan konsep. Definisi formal dari bilangan pecahan tertutup oleh konstruksi "pecahan sebagai bagian dari sesuatu yang utuh". Dengan menggunakan scaffolding "merepresentasikan bilangan bulat sebagai pecahan", maka subjek langsung mampu mengubah struktur berpikirnya dan menghasilkan konsep yang benar. Hal ini menunjukkan pentingnya peranan scaffolding untuk memperbaiki kesalahan konstruksi konsep matematika, seperti yang diungkap oleh beberapa peneliti (Anghileri, 2006; Bakker, dkk, 2015; Bature, 2015) dan scaffolding dapat mendorong subjek untuk mencapai zona proximal development (Peretz, 2006; Jbeili, 2012).

Selanjutnya kasus kesalahan konstruksi "konsep hubungan" antara bilangan pecahan dan bilangan bulat dikaji menggunakan teori pemrosesan informasi dan teori APOS (termasuk abstraksi reflektif). Komponen utama dalam pemrosesan informasi meliputi: sensory memory, short-term memory, dan long-term memory. Struktur mental di APOS meliputi: aksi, proses, objek, dan skema. Mekanisme konstruksi konsep matematis meliputi: interiorisasi, koordinasi, dan encapsulasi.

Pertama, berdasarkan **teori pemrosesan informasi**. Pada saat subjek menghadapi **stimulus** untuk memilih satu dari dua pernyataan yang diberikan, subjek menangkap informasi bilangan pecahan dan bilangan bulat melalui **sensory memory**. Informasi yang masuk diolah di short-term memory. Untuk memecahkan masalah tersebut, subjek merasakan belum cukup dengan informasi yang ada, karena itu subjek melakukan **retrieval** dengan memanggil pengetahuan lama di **long-term memory**. Pengetahuan yang dipanggil di long-term memory adalah konstruksi bilangan pecahan. Subjek menjelaskan bahwa dalam pembentukannya, bilangan pecahan diperoleh dari bilangan bulat, bahwa *setengah, sepertiga, seperempat, dua pertiga* merupakan bagian dari *satu* satuan. Pada kasus lain *dua sepertiga* bagian dari *tiga* satuan, *empat setengah* bagian dari *lima*. Dari kasus-kasus tersebut subjek memunculkan respon dengan menyimpulkan bahwa himpunan bilangan pecahan bagian dari himpunan bilangan bulat. Hal ini memperkuat pengetahuan yang ada di long-term memory.

Ketika "stimulus baru" dimunculkan oleh peneliti bahwa dengan prosedur yang sama, *dua* bagian dari *dua sepertiga* dan *empat* bagian dari *empat setengah*. Informasi tersebut masuk melalui **sensory memory** dan diolah di **short-term memory**. Proses di short-term memory cukup lama yang ditandai dengan berpikir yang menyimpulkan bahwa mestinya bisa disebut bilangan bulat bagian dari pecahan. Dengan kesimpulan yang berbeda ini membuat berpikir subjek menjadi "kacau". Dalam kondisi seperti ini, peneliti memberikan stimulus baru dengan mempertanyakan kepada subjek tentang definisi formal bilangan pecahan. Subjek mencari pengertian bilangan pecahan di long-term memory dan ditemukan bilangan pecahan *sebagai* $\frac{a}{b}$, *dengan a, b bilangan bulat dan* $b \neq 0$. Dalam memahami definisi tersebut, subjek juga masih mengalami masalah bahwa 2 bukan bilangan pecahan tetapi merupakan bilangan bulat. Ketika subjek diberi stimulus baru *enam pertiga* untuk dikaitkan dengan definisi bilangan pecahan, dia menyatakan bahwa *enam pertiga* merupakan bilangan pecahan dan karena *enam pertiga* sama dengan *dua*, maka dia bisa mengonstruksi bilangan bulat merupakan bilangan pecahan. Akhirnya subjek bisa menyimpulkan bahwa himpunan bilangan bulat bagian dari bilangan rasional.

Kedua, analisis berdasarkan struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan matematis. Ketika subjek membaca masalah, ada struktur mental "***action***" yang ditandai oleh adanya respon terhadap masalah. Mekanisme konstruksi pengetahuan yang terjadi adalah ***interiorization***, di mana subjek memahami komponen-komponen yang ada di masalah, yakni bilangan rasional, bilangan bulat, dan himpunan bagian. Komponen-komponen yang sudah diinteriorisasi tersebut selanjutnya diproses dalam struktur mental "***processes***" dengan mekanisme konstruksi pengetahuan "***coordination***". Bilangan rasional dieksplorasi dan dihubungkan dengan bilangan bulat. Dalam hal ini ada kesalahan konstruksi "bilangan rasional bagian dari bilangan bulat". Dengan intervensi terbatas dari peneliti (melalui pemberian scaffolding), subjek melakukan proses perbaikan konstruksi yang cukup panjang, termasuk memanfaatkan pengetahuan lamanya dalam mekanisme ***coordination.*** Akhirnya subjek berhasil memperbaiki struktur kognitifnya (yang salah) dan berhasil mengonstruksi "himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional" sebagai bentuk dari struktur mental ***encapsulation***. Pembentukan konsep tersebut berlanjut pada struktur mental ***schema*** dengan meletakkan konsep tersebut di dalam struktur bilangan.

Dari kasus pengonstruksian konsep himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional tersebut, nampak bahwa perkembangan kognitif seseorang senantiasa berlangsung dalam belajar matematika. Karena itu penelitian terkait dengan proses berpikir selalu diperlukan dalam pendidikan matematika, terutama untuk mengkaji: (1) bagaimana proses berpikir dalam belajar matematika, sehingga bisa digunakan untuk merancang pembelajaran yang sesuai; (2) bagaiman kesalahan konstruksi konsep matematis terbentuk, sehingga bisa dilakukan perbaikan melalui intervensi/scaffolding yang efektif; (3) bagaimana interaksi berpikir terjadi, sehingga bisa digunakan sebagai bahan untuk membentuk kelompok belajar yang efektif; dan (4) bagaimana lintasan berpikir terjadi, sehingga bisa digunakan untuk membentuk berpikir matematis, berpikir kreatif, berpikir kritis, dan berpikir analitis.

4. KESIMPULAN

Dari analisis dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa: (1) kajian proses berpikir sangat penting dilakukan di pendidikan matematika karena sesuai dengan karakteristik matematika yang memiliki objek kajian abstrak, (2) analisis proses konstruksi pengetahuan matematis sangat penting untuk dilakukan terutama untuk mengkaji proses berpikir dalam pembentukan konsep matematis, (3) Berpikir matematis dalam mengonstruksi konsep matematis jika dianalisis melalui teori pemrosesan informasi prosesnya mencakup: sensory memory, short-term memory, dan long-term memory, (4) konstruksi konsep matematis jika ditinjau dari struktur mental bisa berbentuk: action, processes, object. schema dan jika ditinjau dari mekanisme pembentukan pengetahuan matematis berupa proses: interiorization, coordination, dan encapsulation.

DAFTAR PUSTAKA

Anghileri, Julia, 2006. Scaffolding Practices that Enhance Mathematics Learning. Journal of Mathematics Teacher Education (2006) 9: 33–52

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S.R., Trigueros, M., Weller, K., 2014. APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York. Springer.

Bakker, A., Smit, J., & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. ZDM Mathematics Education (2015) 47:1047–1065

Bature, I., J., and Jibrin, A., G. (2015). The Perception of Preservice Mathematics Teachers on the Role of Scaffolding in Achieving Quality Mathematics Classroom Instruction. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology. Volume 3, Number 4, October 2015, Page 275-287

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., Kim, J., 2015. The Development of Children’s Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 46, No. 3, 39-87

Jbeili, Ibrahim (2012). The Effect of Cooperative Learning with Metacognitive Scaffolding on Mathematics Conceptual Understanding and Procedural Fluency. International Journal for Research in Education (IJRE) No. 32, 2012

Kang, H., Scharmann, L.C., Kang, S., Noh, T., 2010. Cognitive conflict and situational interest as factors influencing conceptual change. International Journal of Environmental & Science Education. Vol. 5, No. 4, pp. 383-405

Kieslich, P.J. & Hilbig, B.E., 2014. Cognitive conflict in social dilemmas: An analysis of response dynamics. Judgment and Decision Making, Vol. 9, No. 6, November 2014, pp. 510-522.

Kobiela, M. & Lehrer, R. (2015). The Codevelopment of Mathematical Concepts and the Practice of Defining. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 46, No. 4, 423–454

Leatham, K.R., Peterson, B.E., Stockero, S.L., Zoest, L.,R.V., 2015. Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 46, No. 1, 88-124

Limo’n, Margarita, 2001. On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. Learning and Instruction 11 (2001) pp. 357–380

Mason, J., L.Burton, K.Stacey, 2010. Thinking Mathematically 2nd edition. London: Pearson Education Ltd.

Peretz, Dvora (2006). Enhancing Reasoning Attitudes Of Prospective Elementary School Mathematics Teachers. Journal of Mathematics Teacher Education (2006) 9:381–400

Rolka, K., Rösken, B., and Liljedahl, P., 2007. The Role of Cognitive Conflict In Belief Changes. Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 121-128. Seoul: PME

Soedjadi, 2000. Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia, Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan. Dirjen Dikti. Depdiknas. Jakarta

Subanji & Supratman, 2015. The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. J. Korean Soc. Math. Educ., Ser. D, Res. Math. Educ. Vol. 19, No. 1, pp. 61–79

Subanji & Nusantara, T., 2016. Thinking Process of Pseudo Construction in Mathematics Concepts. International Education Studies; Vol. 9, No. 2; 2016, pp. 17 – 31

Subanji, Isnandar, Santoso, A., Sutadji, E., Sutopo, Hidayanto, E., Suharyadi, 2014. TEQIP - Model Pengembangan Keprofesionalan Guru Kreatif, Inovatif, Bermakna, dan Berkarakter Terintegrasi dalam Lesson Study. UM Press. Malang

Subanji, 2016. Teori Defragmentasi Struktur Berpikir dalam Mengonstruksi dan Memecahkan Masalah Matematika. UM Press. Malang

Tall, D. (1977). Cognitive Conflict and the Learning of Mathematics. Paper pressented at the First Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education at Utrecht, Netherlands, summer 1977, pp. 1-12

Tall, 2009. The Development Of Mathematical Thinking: Problem-Solving And Proof

Toka, Y., Aşkar, P., 2002. The Effect of Cognitive Conflict and Conceptual Change Text on Students' Achievement Related To First Degree Equations with One Unknown. Hacettepe Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi 23, pp. 211-217